ALGEBRA DI BOOLE

*Nel secolo scorso il matematico e filosofo irlandese Gorge Boole (1815-1864), allo scopo di procurarsi un simbolismo che gli consentisse di trattare in termini analitici le proporzioni di un discorso, gettò le basi su un’**algebra** detta **proporzionale** o **binaria**, in quanto ammetteva soltanto due soluzioni.*
Quella che per Boole doveva essere l’idea di un calcolo astratto, di cui certamente egli stesso non poteva valutarne la portata, risultò essere una delle più grandi conquiste della tecnica moderna. Ciò ad opera di alcuni studiosi, come l’americano Claude Shannon e i giapponesi Nakasina e Hanzawa, che prima dell’ultimo cnflitto mondiale pensarono ad applicare la magistrale intuizione di Boole ai circuiti di commutazione.

Le operazioni fondamentali più comunemente usate nell’algebra di boole sono:

- ✓ Prodotto logico o AND,
- ✓ Somma logica o OR,
- ✓ Negazione o complementazione o NOT.

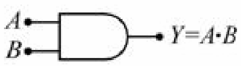
Queste operazioni non devono essre confuse con le operazioni di somma e prodotto dell’algebra usuale che si applicano anche ai numeri binari.

Porte logiche dell’algebra di Boole

NOT

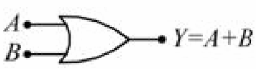
A	Y
0	1
1	0

AND



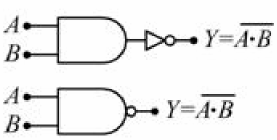
A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR



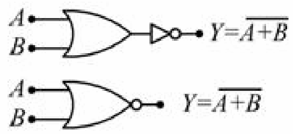
A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NAND



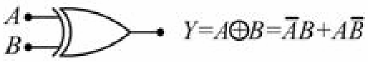
A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR



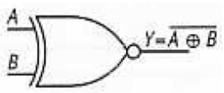
A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

XOR



A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

EX-NOR



A	B	Y= A XNOR B $Y=\overline{A\oplus B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Teoremi fondamentali dell’algebra di Boole

Alcuni di questi teoremi sono immediatamente comprensibili se dimostrati fisicamente mediante una rete di contatti ai quali viene associato il valore 1 se chiusi o 0 se aperti.

$A+1=1$ $A\cdot 0=0$	Teoremi dell’annullamento
$A+0=A$ $A\cdot 1=A$	Teoremi di identità
$A+\overline{A}=1$ $A\cdot\overline{A}=0$	Teoremi dei complementi
$A+A=A$ $A\cdot A=A$	Teoremi di idempotenza
$\overline{\overline{A}}=A$	Teorema della doppia negazione

$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$	Teoremi di De Morgan

Forme canoniche

Una variabili binaria il cui valore dipende dai valori di altre variabili binarie è detta funzione logica di quest'ultime.
Ogni funzione logica può essere espressa tramite una tabella della verità che indica il valore di tutte le combinazioni possibili delle variabili dipendenti o mediante una espressione algebrica che può essere scritta come somma di prodotti oppure come prodotto di somme.

Ad esempio l'espressione:

$$Y = A \cdot (\overline{B} + B\overline{C}) + \overline{A}C$$

può essere riscritta o come somma di prodotti:

$$Y = A\overline{B} + AB\overline{C} + \overline{A}C$$

Oppure, applicando il teorema di De Morgan, come prodotto di somme:

$$Y = \overline{(\overline{A} + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + C) \cdot (A + \overline{C})}$$

Forma canonica della somma

Per forma canonica della somma si intende una espressione booleana in cui tutte le variabili negate o non negate sono presenti in ogni termine e quando tutti i termini sono legati fra loro dall'operatore (+).
Sono forme canoniche della somma ad esempio:

$$Y = AB\overline{C} + ABC + A\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C}$$

$$Y = A\overline{B} + \overline{A}B$$

Non sono forme canoniche:

$Y = AB\overline{C} + ABC + A\overline{B}$ manca C nel 3° termine

$Y = ABC + \overline{A}C + A\overline{C}$ manca B nel 2° e 3° termine

Semplificazione delle funzioni logiche mediante il metodo delle mappe di karnaugh

Questo metodo, grafico, rappresenta una valida alternativa alla semplificazione delle espressioni logiche mediante i teoremi dell'algebra booleana per funzioni di poche variabili, in genere fino ad un massimo di quattro o cinque. Per espressioni con un numero di variabili superiori il metodo risulta alquanto difficoltoso.

Ogni mappa contiene tante caselle quante sono le 2^n combinazioni delle *n* variabili delle funzioni logiche. Caselle che hanno un lato comune si dicono *adiacenti*. Devono essere considerate adiacenti anche le caselle all’estremità di una riga o di una colonna, come se la mappa fosse disegnata su una superficie chiusa su se stessa.

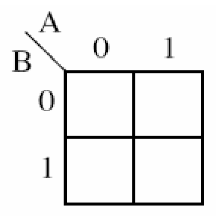
Le caselle inoltre sono disposte in modo tale che passando da una qualsiasi cella ad una sua adiacente sulla stessa riga o sulla stessa colonna cambia il valore di una sola variabile.

Per rappresentare una funzione *Y* sulla mappa basta scrivere 1 nelle caselle corrispondenti alle combinazioni per le quali la funzione vale 1.

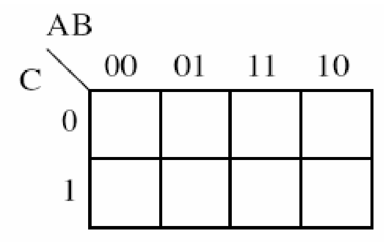
Mappa di Karnaugh a 1 variabile:

	0	1
A	$\overline{A}$	A

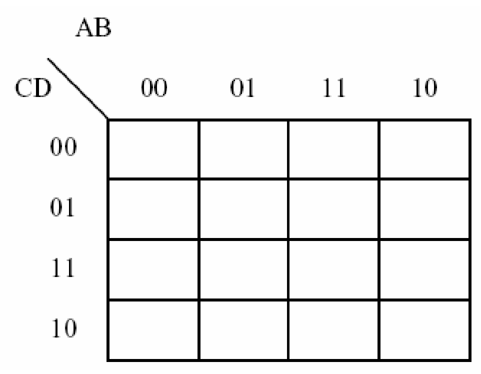
Mappa di Karnaugh a 2 variabili



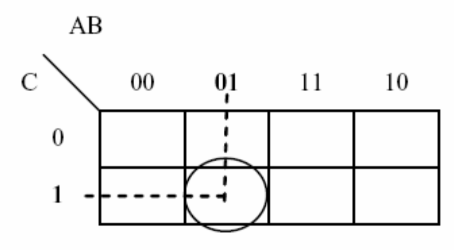
Mappa di Karnaugh a 3 variabili



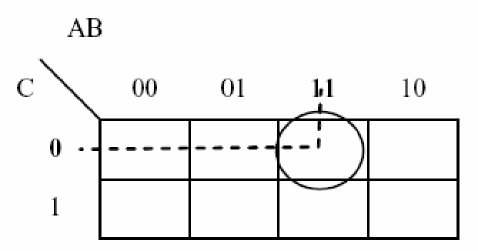
Mappa di Karnaugh a 4 variabili



A ogni combinazione delle variabili corrisponde una casella. Ad esempio, in una mappa a 3 variabili, la combinazione 011 (che si rifà all'espressione $\overline{A}BC$) corrisponde alla seguente casella:

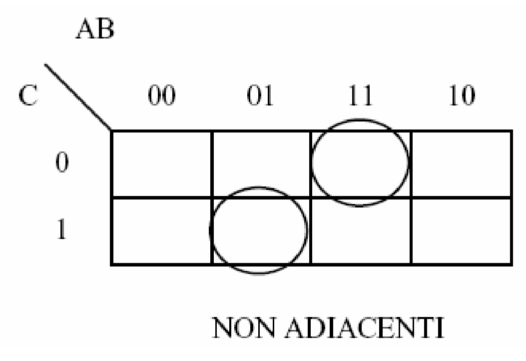


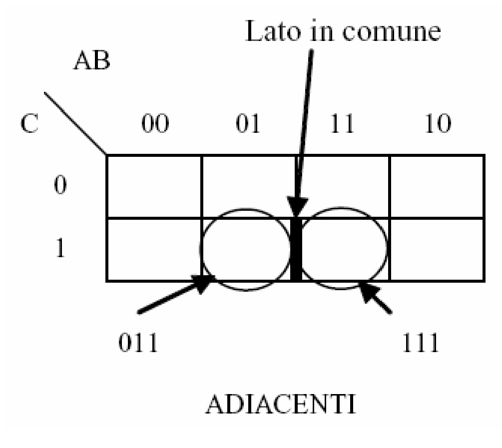
altro esempio: combinazione 110 (A=1, B=1, C=0):

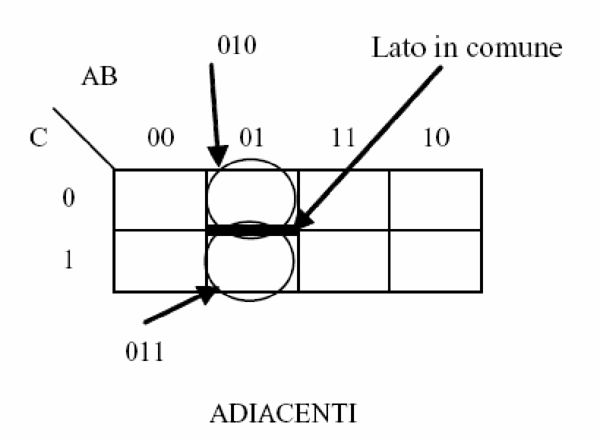


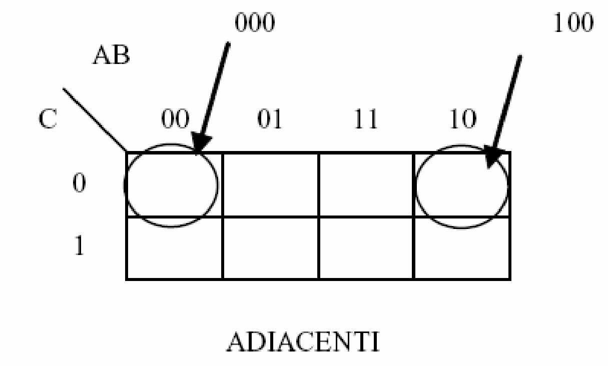
Uno degli aspetti importanti di una mappa di Karnaugh è l'adiacenza delle caselle. Due caselle si dicono adiacenti quando differiscono tra loro per un solo bit (graficamente tali caselle possiedono un lato in comune).

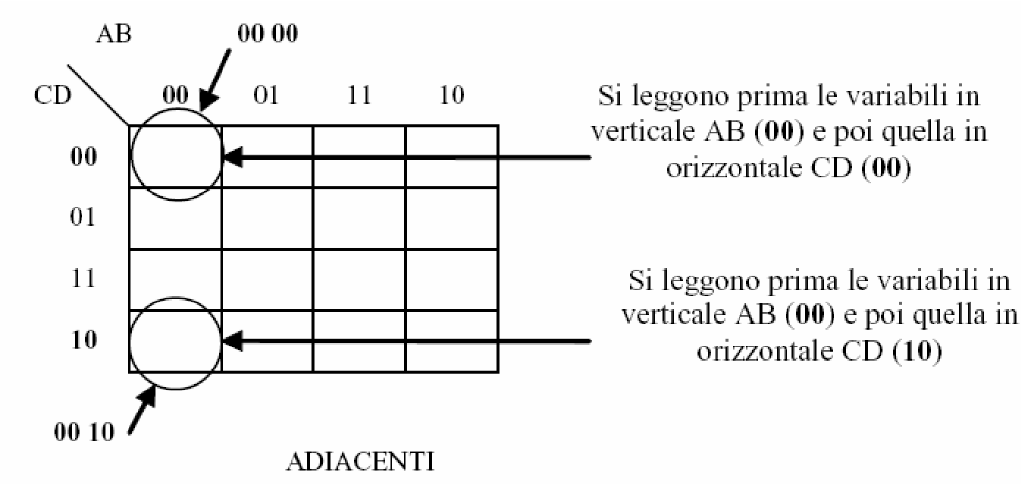
In base a questa definizione possiamo verificare che le caselle degli esempi precedenti non risultano adiacenti a causa della variazione di due bit:

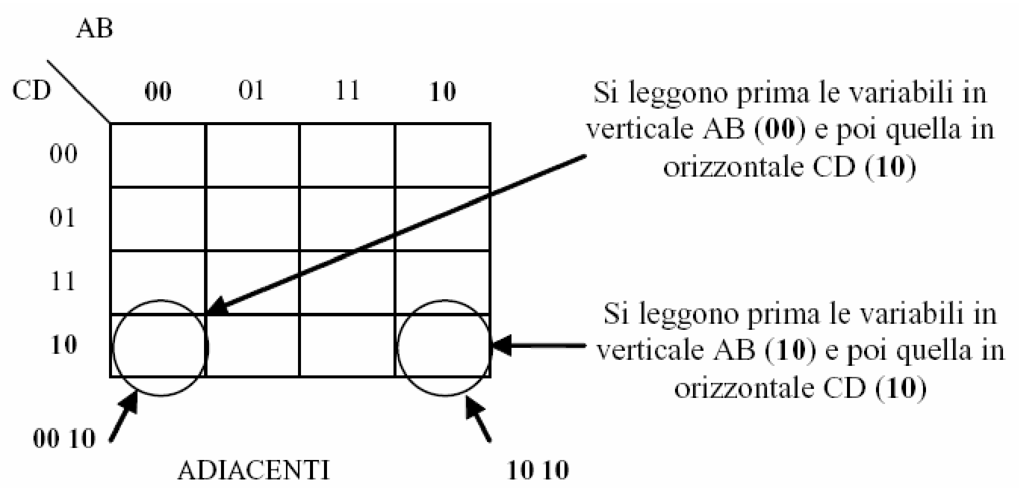












A questo punto possediamo tutti gli strumenti per semplificare una funzione logica attraverso una mappa di Karnaugh. Per fare ciò possiamo seguire le seguenti regole:

1. introdurre i valori “1” dalla tabella di verità alla mappa di Karnaugh corrispondente (o i valori “0” nel caso si utilizzi una sintesi di zeri);
2. formare i gruppi di 1, 2, 4, 8, 16 caselle adiacenti;

3. fare in modo che ogni “1” (o “0”) appartenga ad almeno un gruppo;
4. cercare di ottenere dei gruppi di grandi dimensioni (ad esempio, se esistono 4 caselle adiacenti, ricavare un gruppo da 4 e non 2 gruppi da 2).
5. a ciascun gruppo ottenuto far corrispondere un prodotto tra tutte le variabili che non cambiano (una somma nel caso di sintesi di zeri);
6. ricavare la funzione logica Y attraverso la somma dei prodotti precedenti (un prodotto nel caso di sintesi di zeri).

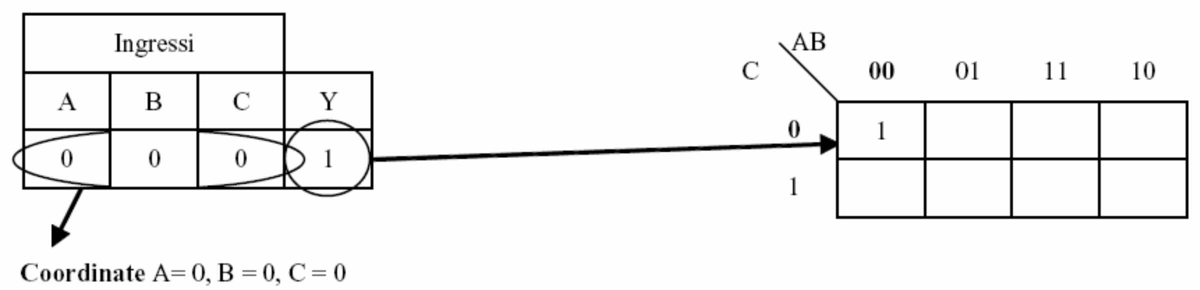
Esempio 1

Minimizzare la funzione logica la cui tabella di verità è quella di figura seguente:

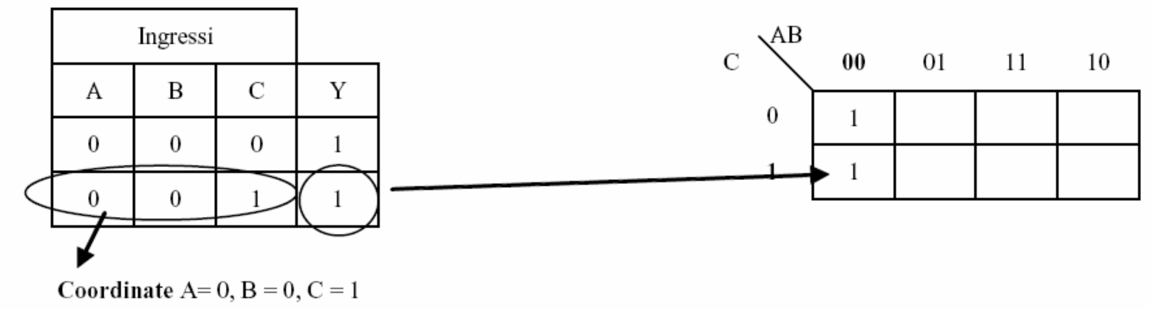
Ingressi			**Uscita**
A	***B***	***C***	***Y***
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Scegliamo la sintesi di “1” per ricavare la funzione logica Y (uscita della rete logica digitale). Poiché la tabella contiene 3 variabili di ingresso denominate A, B, C scegliamo una mappa di Karnaugh a 3 variabili.

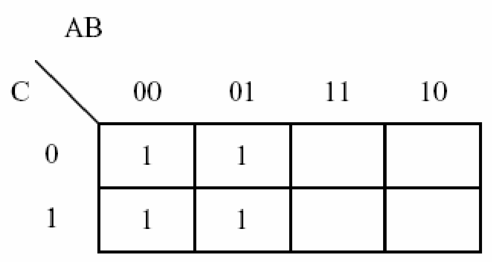
1. Introduciamo i valori dalla tabella di verità alla mappa di Karnaugh. Questa operazione comporta l’inserimento dei valori “1” nelle caselle corrispondenti della mappa. Ad esempio, il primo valore “1”, presenta le coordinate 000:



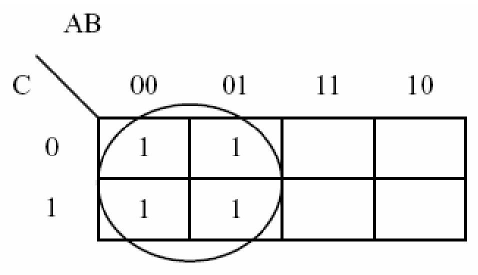
Il secondo “1” ha invece coordinate 001:



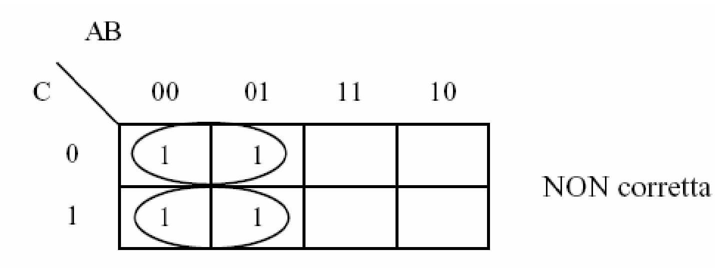
Così procedendo possiamo inserire tutti i valori "1" presenti :



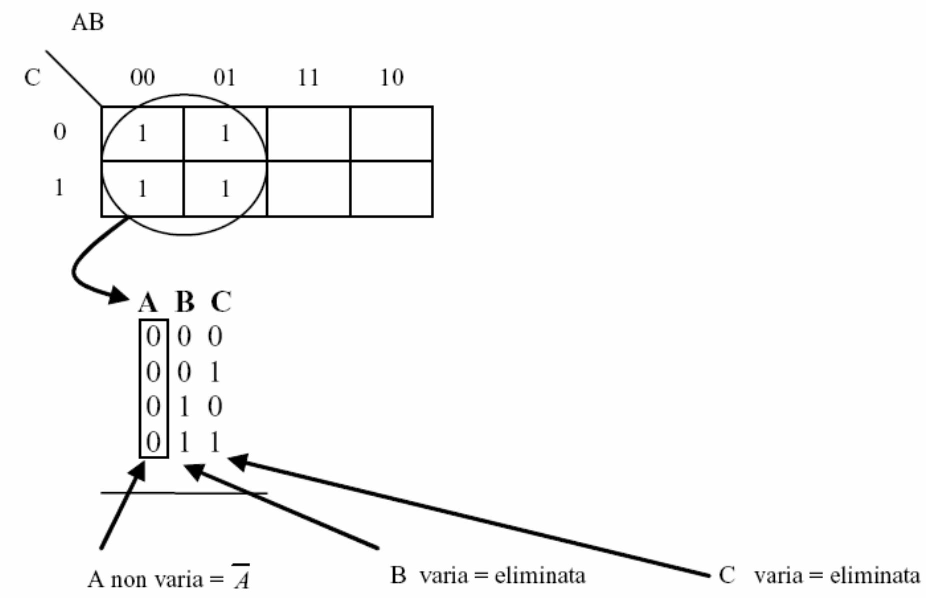
2. Il passo successivo è quello di formare i gruppi. In questo caso possiamo formare un solo gruppo costituito da 4 caselle (adiacenti):



3. La regola n° 3 è soddisfatta in quanto tutti i valori "1" presenti appartengono ad un gruppo.
4. La regola n°4 prevede la realizzazione di gruppi di grandi dimensioni. In questo caso il più grande gruppo possibile è proprio quello costituito da 4 elementi. Per la stessa ragione la soluzione alternativa di 2 gruppi da 2 elementi ciascuno risulterebbe non corretta:



5. Nell'unico gruppo presente l'unica variabile a non cambiare è A (negata in quanto il suo valore è pari a "0"):



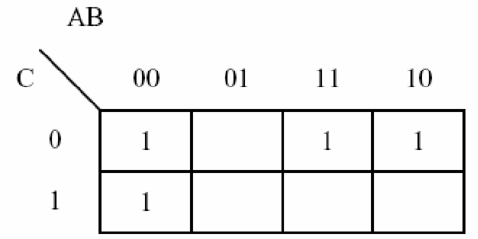
In questo caso il prodotto è costituito solo da A perché B e C sono eliminate.

Esempio 2
Minimizzare la funzione logica la cui tabella di verità è quella di figura seguente:

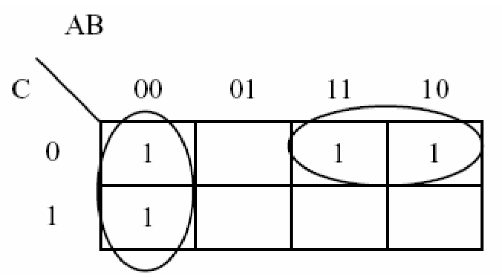
Ingressi			Uscita
A	*B*	*C*	*Y*
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Scegliamo la sintesi di “1” per ricavare la funzione logica Y (uscita della rete logica digitale). Poiché la tabella contiene 3 variabili di ingresso denominate A, B, C scegliamo una mappa di Karnaugh a 3 variabili.

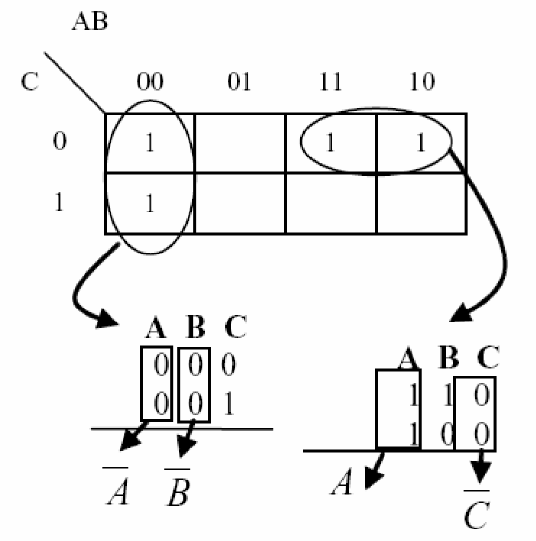
1. Introduciamo i valori dalla tabella di verità alla mappa di Karnaugh:



2. Il passo successivo è quello di formare i gruppi. In questo caso possiamo formare 2 gruppi da 2 caselle:



3. La regola n° 3 è soddisfatta in quanto tutti i valori “1” presenti appartengono ad un gruppo.
4. La regola n°4 prevede la realizzazione di gruppi di grandi dimensioni. In questo caso il più grande gruppo possibile è proprio quello da 2 elementi.
5. Nel primo gruppo non cambiano le variabili A e B (negate in quanto il valore è pari a “0”). Nel secondo gruppo non cambiano le variabili A e C (C è negata in quanto è pari a “0”).



Il primo prodotto è pari ad $\overline{A} \cdot \overline{B}$, il secondo $A\overline{C}$.

Esempi da svolgere

Ingressi			Uscita
A	***B***	***C***	***Y***
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Ingressi			Uscita
A	***B***	***C***	***Y***
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Ingressi				Uscita
A	**B**	**C**	**D**	**Y**
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0